

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală a județului Alba, 13 februarie 2015

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE - CLASA a XI-a

Problema 1. Se consideră matricele $X \in \mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{C})$, $Y \in \mathcal{M}_{2,n}(\mathbb{C})$ și $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A = XY$ și $\text{rang} X = 2$. Demonstrați următoarele afirmații:

- Dacă $n \geq 4$, atunci $A^* = O_n$, unde A^* este adjuncta matricei A .
- $\text{rang} A = \text{rang} Y$.
- Dacă $\text{rang} Y \neq 2$, atunci $A^2 = tA$, unde $t = \text{tr}(A)$.

Soluție

- $\text{rang} A \leq \text{rang} X = 2$ 1 punct
Din $\text{rang} A = 2$ și $n \geq 4$ rezultă că toți minorii de ordin $(n - 1)$ sunt nuli 1 punct
 $A^* = O_n$ 1 punct
- Aplicarea inegalității lui Sylvester
 $\text{rang} A = \text{rang} XY \geq \text{rang} X + \text{rang} Y - 2 = \text{rang} Y$ 1 punct
 $\text{rang} A = \text{rang} XY \leq \text{rang} Y$, $\text{rang} X = \text{rang} Y$ 1 punct
- $\text{rang} A = \text{rang} Y \in \{0, 1\}$ 1 punct
 $A^2 = tA$ 1 punct

Problema 2. Fie matricea nesingulară $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $\det(A + A^t) = 12$. Să se arate că

$$\det\left(\sqrt[3]{\frac{1}{3}}A + \sqrt[3]{\frac{8}{3}}A^t\right) = 12 + \det A.$$

Soluție

- Egalitatea de demonstrat este echivalentă cu $\det(A + 2A^t) = 3(12 + \det A)$ 1 punct
 $f(x) = \det(A + xA^t)$ 1 punct
 $f(x) = d + \alpha x + \alpha x^2 + dx^3$, unde $d = \det A$ 2 puncte
 $f(x) = 12$ implică $f(x) = d + (6 - d)x + (6 - d)x^2 + dx^3$ 1 punct
 $f(2) = 3(12 + d)$ 2 puncte

Problema 3. Să se calculeze:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{45n} \left(-2^{-n} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 2^{-n+\ln\left(1+\frac{1}{2^{\sqrt{2015n^2+k}}}\right)} \right).$$

Soluție

Notăm cu $a_n = 2^{45n} \left(-2^{-n} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 2^{-n+\ln\left(1+\frac{1}{2^{\sqrt{2015n^2+k}}}\right)} \right), n \geq 1$

$a_n = 2^{44n} \left(-1 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 2^{\ln\left(1+\frac{1}{2^{\sqrt{2015n^2+k}}}\right)} \right), n \geq 1 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

$a_n \leq 2^{44n} \left(-1 + 2^{\ln\left(1+\frac{1}{2^{\sqrt{2015n^2+1}}}\right)} \right) \stackrel{not}{\cong} c_n, n \geq 1 \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$

$a_n \geq 0 \text{ sau } a_n \geq 2^{44n} \left(-1 + 2^{\ln\left(1+\frac{1}{2^{\sqrt{2015n^2+n}}}\right)} \right) \stackrel{not}{\cong} b_n, n \geq 1 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0, \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$

Criteriul **cleștelui**, $\lim_{n \rightarrow \infty} a = 0, \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

Problema 4. Se consideră numerele reale strict pozitive a, b, c și șirul $(x_n)_{n \geq 0}, x_n = \frac{a}{b^n} + \frac{b}{c^n} + \frac{c}{a^n}, n \in \mathbb{N}$.

- Demonstrați că dacă a, b sau $c \in (0,1)$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.
- Demonstrați că dacă $a, b, c \in [1, +\infty)$ și cel puțin două sunt diferite, atunci șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este strict descrescător.
- Demonstrați că dacă $x_0 \leq x_1$, atunci șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este mărginit dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

Gazeta Matematică 10/2014(enunț modificat)

Soluție

- a) Fie $d = \min(a, b, c)$. De aici rezultă $d \in (0,1) \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{d^n} = +\infty, \quad \text{unde } \alpha \in \{a, b, c\} - \{d\} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

- b) $a, b, c \in [1, +\infty)$ implică că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este descrescător $\dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

Fie $d = \max(a, b, c)$. Cum $d \in (1, +\infty)$, obținem că $(x_n)_{n \geq 0}$ este strict descrescător .. 1 punct

- c) “ \Leftarrow ” Dacă $a = b = c = 1$, atunci $x_n = 3, \forall n \in \mathbb{N}$, deci $(x_n)_{n \geq 0}$ este mărginit $\dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

“ \Rightarrow ” Dacă $(x_n)_{n \geq 0}$ este mărginit rezultă că $a, b, c \in [1, +\infty) \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

Dacă a, b sau $c \in (1, +\infty)$, atunci $(x_n)_{n \geq 0}$ este strict descrescător, contradicție cu $x_0 \leq x_1$,

deci $a = b = c = 1 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$